1. Är $\mathbb{Q}$ en grupp under addition och/eller multiplication? Vad gäller för $\mathbb{C}$ och $\mathbb{N}$?

2. Vi har sett gruppen S_3 som symmetrierna hos en triangel. S_4 konstrueras liknande, som symmetrierna hos en kvadrat. Skriv ner allt i S_4.

3. Är de jämna heltalen en grupp under addition? Är de udda talen det?

4. S_n definieras liknande S_3 och S_4 (för olika heltal n). Vilken ordning har S_n? (S_n kallas för den n :te symmetriska gruppen.)

5. Definiera $a \oplus b = \max(a, b)$. Är $\mathbb{N}$ en grupp under $\oplus$? Är $\mathbb{Z}$?

6. Visa att om $-a$ är inversen till a så är inversen till $-a$ [dvs. $-(-a)$] lika med a.

7. Visa att om $g^2 = g$ så är $g = e$.

8. Visa att $-(a+b) = (-b)+(-a)$. (Ni som har arbetat med matriser känner nog igen formeln bättre om vi skriver om den med multiplikation istället för addition. Den ser då ut som $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.)

9. Beteckna med $\mathbb{Z}_n$ talen mellan 0 och $n-1$ (inklusivt)(t.ex. är $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$). Räkning i $\mathbb{Z}_n$ är så kallad modulusräkning då vi alltid reducerar resultatet av en beräkning med n tills vi åter får ett tal i $\mathbb{Z}_n$. I t.ex. $\mathbb{Z}_3$ har vi då $2+2[=4] = 1$, $1+2[=3] = 0$ och $2 \cdot 2[=4] = 1$. Är $\mathbb{Z}_n$ en grupp med addition? Med multiplikation? Har valet av n någon inverkan?

10. Visa att i en grupp G så har exvationerna $ax = b$ och $xa = b$ alltid en unik lösning.

11. Visa omvändningen till övningen ovan, dvs. om vi har en binär operation $(+)$ på en mängd element (S) så att ekvationerna ovan alltid har en unik lösning så bildar S en grupp under $+$.

12. Om vi har en grupp G med operation $\cdot$, definiera $a \odot b = b \cdot a$ (dvs. den "omvända" operationen). Visa att G är en grupp under $\odot$. Är det nödvändigtvis "samma" grupp som G under $\cdot$?

13. Visa att om G är en grupp med ett ändligt och jämnt antal element så finns det ett $a \neq e$ för vilket $a^2 = e$.

14. Låt $n\mathbb{Z}$ vara gruppen av alla heltal som är multiplar av n (med addition). $n\mathbb{Z}$ är en delgrupp till $\mathbb{Z}$. Har $n\mathbb{Z}$ några egna delgrupper?

15. Vila delgrupper har $\mathbb{Z}_6$ (se uppg. 9)? Vilka är cykliska?

16. Hur ser delgruppen till $(\mathbb{Z}, +)$ genererad av 5 ut? Hur många element har den?

17. Vilken ordning har de olika elementen i $\mathbb{Z}_5$? S_3? $\mathbb{Z}_{10}$? Finns det någon relation mellan ordning på elementen och gruppens ordning?

18. I GL_2, finn ordningen för $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

19. Vad har de olika elementen i S_4 för ordning? Hur kan man använda Lagranges sats för att förenkla beräkningarna?

20. Bevisa att alla cykliska grupper är abelska.

21. Bevisa att alla grupper med prim ordning p är cykliska.

22. Låt G vara en oändlig, abelsk grupp. Visa att mängden element med ändlig ordning i G är en delgrupp.

23. Låt n vara ett heltal strikt större än 2 och G en grupp. Visa att det finns ett jämnt antal element med ordning n i G.

24. Visa att den multiplikativa gruppen $\mathbb{Z}_{10}^{\times}$ är isomorf med den additiva gruppen $\mathbb{Z}_4$.

25. Beakta gruppen $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, med element (a, b), där a och b båda tillhör $\mathbb{Z}_2$. Vi definierar addition av (a, b) och (c, d) som $(a + c, b + d)$. Vilka element har G?

26. Vilken ordning har elementen i G ovan?

27. Är G ovan isomorf med $\mathbb{Z}_4$?

28. Visa att alla grupper av ordning 2 resp. 3 måste vara isomorfa med $\mathbb{Z}_2$ resp. $\mathbb{Z}_3$ (ledning: gör en multiplikationstabell för $\mathbb{Z}_2$ och $\mathbb{Z}_3$).

29. Som ovan, men vad gäller för 4? Finns det grupper av ordning 4 som inte är isomorfa med $\mathbb{Z}_4$? Hur många sådana klasser av isomorfa grupper av ordning 4 finns det?

30. Definiera en binär operation $\oplus$ på de reella talen med $a \oplus b = a + b + ab$. Låt G vara all reella tal utom -1. Hitta en ismorfism mellan $\mathbb{R}^{\times}$ (dvs. reella tal utom noll med multiplikation) och gruppen $(G, \oplus)$.